КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Лаптева Анастасия Владимировна

МИНИМАЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В ЗАДАННЫХ КЛАССАХ ГОМОЛОГИЙ

01.01.04 - геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2007

Работа выполнена на кафедре геометрии и высшей алгебры механико-математического факультета Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского.

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук,
профессор Яковлев Евгений Иванович

Официальные оппоненты –
доктор физико-математических наук,
профессор Степанов Сергей Евгеньевич

доктор физико-математических наук,
профессор Шурыгин Вадим Васильевич

Ведущая организация –
Челябинский государственный университет

Защита состоится 29 марта 2007 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корп. 2, ауд. 217.
С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского государственного университета.
Автореферат разослан 15 февраля 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент М.А. Малахальцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В последние два десятилетия сформировалась и активно развивается вычислительная топология, в которой соединяются два различных, хотя и связанных друг с другом направления. Первое – это использование компьютерных методов при решении тех или иных проблем самой топологии, например, классификации компактных трехмерных многообразий в работах С.В. Матвеева [1,2]. Второе направление можно обозначить как приложения топологии к задачам, связанным с компьютерным моделированием и компьютерной графикой.

Настоящая работа в большей степени относится ко второму из указанных направлений.

Существует много работ, в которых предлагаются различные подходы к вычислению топологических характеристик и элементов полиэдров. Можно отметить классический алгоритм для вычисления групп гомологий и их базисов произвольного симплициального комплекса, основанный на приведении матриц инциденций к нормальной диагональной форме. В работах J. Chao и J. Nakayama [3], J. Friedman[4] предлагались различные его модификации.

Для поверхностей известен ряд методов, основанных на использовании представления ее в виде канонического многоугольника. Так, в работах G. Vegter и C. K. Yap[5], F. Lazarus и др.[6] предложен алгоритм поиска базиса одномерной группы гомологии замкнутой поверхности. С помощью канонического представления решаются задача построения базиса фундаментальной группы поверхности из пе-

[1] Матвеев, С. В. Алгоритмическая классификация 3-многообразий. Проблемы и результаты / С. В. Матвеев // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 1999. – Т. 225. – С. 264–275.

[2] Матвеев, С. В. Табулирование трехмерных многообразий / С. В. Матвеев // Успехи математических наук. – 2005. – Т. 60. N 4. – С. 97–122.

[3] Chao, J. Cubical singular simplex model for 3D objects and fast computation of homology groups / J. Chao, J. Nakayama // Proc. IEEE. – 1996. – P. 190–194.

[4] Friedman, J. Computing Betti numbers via combinatorial Laplacians / J. Friedman // Proc. 28th ACM Sympos. Theory Comput. – 1996. – P. 386–391.

[5] Vegter, G. Computational Complexity of Combinatorial Surfaces / G. Vegter, C. K. Yap // Proceedings of the 6th Annual Symposium on Computational Geometry. – 1990. – P. 93–111.

[6] Lazarus, F. Computing a Canonical Polygonal Schema of an Orientable Triangulated Surface / F. Lazarus, M. Pocchiola, G. Vegter, A. Verroust // Proc. 17th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom. – 2001. – P. 80–89.

тель минимальной длины (E. Colin de Verdiere, F. Lazarus[7]) и задача определения гомотопности двух заданных кривых (T.K. Dey, S. Guha [8,9]).

В работах H. Edelsbrunner и соавторов [10,11] разработан алгоритм вычисления групп гомологий трехмерного симплициального комплекса, основанный на построении триангуляции Делоне. Другой метод решения аналогичной задачи предложен в серии работ T.K. Dey, S. Guha [12,13,14].

Нематричным методам поиска циклов, порождающих базисы групп гомологий для двумерных многообразий, посвящены работы Е.И. Яковлева и его учеников [15,16,17].

В работе X. Gu, S. J. Gortler и H. Hoppe[18] с помощью процедуры, аналогичной коллапсированию, построен алгоритм нахождения графа разрезания, однако авторы не ставят задачу построения базисных циклов, а лишь находят граф, их содержащий.

Большая серия работ связана с применениями в вычислитель-

---

[7] Colin de Verdiere, E. Optimal System of Loops on an Orientable Surface / E. Colin de Verdiere, F. Lazarus // Proceedings of the 43rd Annual IEEE Symposium of Foundations of Computer Science. – 2002. – P. 627–636.

[8] Dey, T. K. Optimal algorithms for curves on surfaces / T. K. Dey, S. Guha // Proc. 35th IEEE Ann. Sympos. Found. Comput. Sci. – 1995. – P. 266–274.

[9] Dey, T. K. Transforming Curves on Surfaces / T. K. Dey, S. Guha // J. Comput. Sys. Sci. – 1999. Vol. 58. – P. 297–325.

[10] Delfinado, C. An incremental algorithm for betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere / C. Delfinado, H. Edelsbrunner // Comput. Aided Geom. Design. – 1995. – Vol. 12. – P. 771–784.

[11] Edelsbrunner, H. Topological Persistence and Simplification / H. Edelsbrunner, D. Letscher, A. Zomorodian // Disc. Comput. Geom. 28. – 2002. – P. 511–533.

[12] Dey, T. K. Computational topology / T. K. Dey, H. Edelsbrunner, S. Guha // Advances in Discrete and Computational Geometry. – Providence, 1998. – P. 109–143.

[13] Dey, T. K. Algorithms for Manifolds and Simplicial Complexes in Euclidean 3-Space / T. K. Dey, S. Guha // Proc. 28th ACM Sympog. Theory Comput. – 1996. – P. 398–407.

[14] Dey, T. K. Computing Homology Groups of Simplicial Complexes in R3 / T. K. Dey, S. Guha // Proceedings ot 28th Symposium of Theory of Computing. – 1996. – P. 397–407.

[15] Зинченко, В. Ю. Новый метод построения базисных циклов групп гомологий полиэдров / В. Ю. Зинченко // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – 2003. – Т. 21. – С. 118–120.

[16] Яковлев, Е. И. Быстрые алгоритмы вычисления групп гомологий и их базисов / Е. И. Яковлев, П. А. Гордиенко // Материалы VII Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения". – 2001. – С. 284 – 287.

[17] Яковлев, Е. И. Алгоритмы для вычисления базисных циклов одномерной группы относительных гомологий / Е. И. Яковлев, О. В. Логинов // Вестник ННГУ. Серия Математика. – 2003. – Вып. 1. – С. 132 – 142.

[18] Gu, X. Geometry Images / X. Gu, S. J. Gortler, H. Hoppe // Proc. SIGGRAPH'02. – New York, 2002. – P. 355 – 361.

ных алгоритмах дискретного аналога теории Морса. В частности, на основе подобных методов в работах I. Guskov и Z. Wood[19], Z. Wood и др.[20] предлагается один из способов устранения топологического шума, то есть топологических дефектов компьютерных моделей.

Диссертационная работа посвящена разработке методов вычисления минимальных циклов (абсолютных и относительных) в заданных классах одномерных гомологий триангулированных замкнутых многообразий, а также их применениям.

В частности, здесь получен новый способ локализации и устранения топологического шума в компьютерных моделях.

Построенная в диссертации индексная вектор-функция позволяет решать задачу о гомологичности двух заданных одномерных цепей для любого n-мерного замкнутого многообразия.

Целью работы является разработка методов решения следующих задач:

1) индексация ребер триангулированного замкнутого n-мерного многообразия P относительно заданного $(n-1)$-мерного цикла $Y \in Z_{n-1}(P)$;

2) построение симплициального регулярного накрытия $p : \hat{P}_J \to P$ с группой накрывающих преобразований $G \cong H_1(P)$;

3) поиск цепей $c \in C_1(P)$, минимизирующих весовую функцию $L : C_1(P) \to \mathbb{R}$ на заданном подмножестве группы $C_1(P)$;

Методы исследования. Использованы методы алгебраической и кусочно-линейной топологии, теории графов.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Предложен способ индексации одномерных симплексов триангулированного замкнутого многообразия P относительно заданного цикла $z \in Z_{n-1}(P)$. С его помощью строится гомоморфизм $J_z : C_1(P) \to \mathbb{Z}_2$, позволяющий вычислить индекс пересечения z с любым одномерным циклом полиэдра P, а также индексная вектор-функция $J : C_1(P) \to \mathbb{Z}_2^r$ относительно базиса $[z_1^{n-1}], \ldots, [z_r^{n-1}]$ группы гомологий $H_{n-1}(P)$.

[19] Guskov, I. Topological Noise Removal / I. Guskov, Z. Wood // Graph. Interf. – 2001. – P. 19–26.

[20] Wood, Z. Removing Excess Topology From Isosurfaces / Z. Wood, H. Hoppe, M. Desbrun, P. Schroder // ACM Transactions on Graphics. – 2004. – Vol. 23, No 2. – P. 190 – 208.

2. Построена симплициальная схема полиэдра $\hat{P}_J$, симплициально и регулярно накрывающего многообразие P с группой накрывающих преобразований $G \cong H_1(P)$.

3. Разработаны методы минимизации весовой функции $L : C_1(P) \to \mathbb{R}$ на следующих подмножествах группы $C_1(P)$ замкнутого многообразия P:

- на множестве путей, соединяющих фиксированные вершины и имеющих заданный индекс;

- на множестве одномерных цепей, соединяющих вершину u многообразия P с некоторым подполиэдром $Q \subset P$ и образующих класс относительных гомологий $[\bar{x}] \in H_1(P, \{u\} \cup Q)$;

- на произвольном ненулевом гомологическом классе $[x] \in H_1(P)$.

4. Указан способ построения минимальных циклов, порождающих базис группы $H_1(P)$, дуальный заданному базису группы $H_{n-1}(P)$.

5. Найдены приложения полученных результатов, в частности, предложен способ выделения ручек и устранения топологического шума в компьютерных моделях поверхностей трехмерных тел.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для вычисления топологических характеристик и элементов полиэдров, для изучения и обработки компьютерных моделей реальных объектов, а также при чтении спецкурсов.

Научная новизна. Все результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Апробация. Описанные результаты работы были обнародованы на международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики"(Казань, 26 сентября – 1 октября 2004 г.); на всероссийских молодежных научных школах-конференциях "Лобачевские чтения"(Казань, 2005г., 2006г.); на международных летних школах-семинарах по современным проблемам теоретической и математической физики "Петровские чтения"(Казань, 2005г., 2006г.); на III международной конференции по прикладной математике (Пловдив, Болгария, 12–18 августа 2006 г.); на региональной научной конференции "Современные вопросы геометрии и механики деформируемого твердого тела"(Чебоксары, 19–20 октября 2006г.); на научных семинарах по геометрии и топологии кафедры геометрии и высшей алгебры ННГУ (рук. доц. Н.И. Жукова и проф. Е.И. Яковлев, 2005г., 2006г.); на научном семинаре кафедры компьютерной топологии и алгебры Челябинского госуниверситета (рук. член-корр. РАН С.В. Матвеев, 2006г.).

Публикации и вклад автора. Результаты диссертации опубликованы в 11 работах, список которых приведен в конце автореферата. В совместных статьях [1], [2], [6] и [9] научному руководителю Е.И. Яковлеву принадлежат постановка задачи и общее руководство работой. Все теоремы и их доказательства получены автором диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы, заключения, списка литературы и включает в себя 7 рисунков. Объем диссертации составляет 102 страницы. Список литературы состоит из 67 наименований.

Краткое содержание работы.

Во **введении** обосновываются актуальность темы диссертации и ее научная новизна, определяются цели и задачи исследования, приводится краткое содержание диссертации.

Глава 1, состоящая из 6 параграфов, носит, в основном, реферативный характер. Здесь кратко определены необходимые для дальнейшего понятия, собраны некоторые сведения из алгебраической и кусочно-линейной топологии, а также приведены два вспомогательных алгоритма, используемые в следующих главах диссертации.

Глава 2 посвящена построению симплициальных регулярных накрытий $p : \hat{P}_J \to P$ с заданной группой автоморфизмов.

В **§2.1** разработан способ индексации ребер замкнутого многообразия P относительно заданного $(n-1)$-мерного простого цикла z. Это означает построение индексной функции $J_z : K^1(P) \to \mathbb{Z}_2$, где $K^1(P)$ – набор одномерных симплексов (ребер) полиэдра P.

Конкретной реализацией метода является **Алгоритм 2.1**.

Теорема 2.1. *Если P – замкнутое n-мерное многообразие, z – простой $(n-1)$-мерный цикл, $x = a_1 + \cdots + a_l \in Z_1(P)$ и $J_z(x) = \sum_{i=1}^{l} J_z(a_i)$, где J_z – функция, построенная с помощью алгоритма 2.1, то $J_z(x) = \mathrm{Ind}([x],[z])$.*

В **§2.2** мы определяем индексную вектор-функцию относительно заданного базиса группы гомологий $H_{n-1}(P)$ и исследуем ее свойства.

Определение 2.1. Пусть $[z_1^{n-1}],\ldots,[z_r^{n-1}]$ – базис группы гомологий $H_{n-1}(P)$. Гомоморфизм $J : C_1(P) \to \mathbb{Z}_2^r$, $J = (J^1,\ldots,J^r)$, будем называть *индексной вектор-функцией* относительно базиса $[z_1^{n-1}],\ldots,[z_r^{n-1}]$, если для произвольного цикла $y \in Z_1(P)$ и каждого $k \in \{1,\ldots,r\}$ имеет место равенство $J^k(y) = \mathrm{Ind}([y],[z_k^{n-1}])$. При этом для любой цепи $x \in C_1(P)$ элемент $J(x) \in \mathbb{Z}_2^r$ далее будет называться ее *индексом.*

Согласно теореме 2.1, индексная вектор-функция $J : C_1(P) \to \mathbb{Z}_2^r$ может быть вычислена с помощью алгоритма 2.1.

Предложение 2.1. *Если $J : C_1(P) \to \mathbb{Z}_2^r$ – индексная вектор-функция относительно базиса $[z_1^{n-1}],\ldots,[z_r^{n-1}]$ группы $H_{n-1}(P)$, $x,y \in C_1(P)$ и $\partial x = \partial y$, то $J(x) = J(y)$ тогда и только тогда, когда $x \sim y$.*

В **§2.3** исследуется связь между симплициальными действиями конечной группы G и симплициальными регулярными накрытиями с группой накрывающих преобразований G.

В **§2.4** строятся симплициальные регулярные накрытия $p : \hat{P} \to P$ с группой накрывающих преобразований $G \cong \mathbb{Z}_2^r$.

Пусть $S = (V,K)$ – симплициальная схема полиэдра P, а $J : C_1(P) \to \mathbb{Z}_2^r$ – эпимоморфизм, ядро которого содержит группу границ $B_1(P)$. Построим схему $\hat{S} = (\hat{V},\hat{K})$ следующим образом.

Положим $\hat{V} = V \times G$, где $G = \mathbb{Z}_2^r$. Пусть $\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_m \in \hat{V}$, где $\hat{v}_i = (v_i,g_i)$ для всех $i = 0,1,\ldots,m$. Будем считать, что $\{\hat{v}_0,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_m\} \in \hat{K}$, если выполняются следующие условия:

- $\{v_0,v_1,\ldots,v_m\} \in K$;
- $g_0 + g_i = J([v_0v_i])$ для любых $i = 1,\ldots,m$.

Определим отображение $p^0 : \hat{V} \to V$ и левое действие $\lambda^0 : G\times\hat{V} \to \hat{V}$ группы G на $\hat{V}$, полагая

$$p^0((v,g)) = v \quad \text{и} \quad \lambda^0(g',(v,g)) = g'\cdot(v,g) = (v,g'+g)$$

для всех $(v,g) \in \hat{V}$ и $g' \in G$.

Символом $\hat{P}_J$ обозначим какую-либо реализацию схемы $\hat{S} = (\hat{V},\hat{K})$. При этом множество вершин полиэдра $\hat{P}_J$ отождествим с $\hat{V}$.

Теорема 2.2. *Для отображения $p^0 : \hat{V} \to V$ существует продолжение $p : \hat{P}_J \to P$, являющееся симплициальным регулярным накрытием с группой накрывающих преобразований $G \cong \mathbb{Z}_2^r$. Если P – замкнутое многообразие, а J – индексная вектор-функция относительно некоторого базиса группы $H_{n-1}(P)$, то $G \cong H_1(P)$.*

В **§2.5** сформулированы существенные для дальнейших исследований свойства построенного регулярного накрытия $p : \hat{P}_J \to P$.

Предложение 2.2. *Пусть $x = [v_0v_1]+[v_1v_2]+\cdots+[v_{s-1}v_s]$ – путь в полиэдре P и $g_0 \in G = \mathbb{Z}_2^r$. Тогда единственный путь $\hat{x}$ полиэдра $\hat{P}_J$, начинающийся в вершине $\hat{v}_0 = (v_0, g_0)$ и накрывающий путь x, определяется формулами*

$$\hat{v}_i = (v_i, g_0 + J(x_i))\,, \quad i = 1, \ldots, s,$$

где $x_i = [v_0v_1] + [v_1v_2] + \cdots + [v_{i-1}v_i]$, и

$$\hat{x} = [\hat{v}_0\hat{v}_1] + [\hat{v}_1\hat{v}_2] + \cdots + [\hat{v}_{s-1}\hat{v}_s].$$

Предложение 2.3. *Пусть $x = [v_0v_1] + [v_1v_2] + \cdots + [v_{s-1}v_s]$ и $y = [u_0u_1] + [u_1u_2] + \cdots + [u_{t-1}u_t]$ – пути полиэдра P, идущие из вершины $v_0 = u_0$ в вершину $v_s = u_t$, $\hat{x} = [\hat{v}_0\hat{v}_1] + [\hat{v}_1\hat{v}_2] + \cdots + [\hat{v}_{s-1}\hat{v}_s]$ и $\hat{y} = [\hat{u}_0\hat{u}_1] + [\hat{u}_1\hat{u}_2] + \cdots + [\hat{u}_{t-1}\hat{u}_t]$ – пути в $\hat{P}_J$, накрывающие пути x и y соответственно и имеющие общее начало $\hat{v}_0 = \hat{u}_0$. Тогда $\hat{v}_s = \hat{u}_t$ в том и только том случае, если $J(x) = J(y)$. В случае когда P – замкнутое многообразие, а J – индексная вектор-функция относительно некоторого базиса группы $H_{n-1}(P)$, последнее равносильно гомологичности цепей x и y.*

В **Главе 3** разработаны и обоснованы методы построения цепей $c \in C_1(P)$, минимизирующих неотрицательную весовую функцию $L : C_1(P) \to \mathbb{R}$ на заданном подмножестве группы $C_1(P)$.

В **§3.1** рассматриваются весовые функции на группах 1-цепей полиэдра P и накрывающего его полиэдра $\hat{P}_J$.

В **§3.2** получены **Алгоритм 3.1** и его обоснование – **теорема 3.1**, посвященные вспомогательной задаче о поиске минимального пути с заданными концами и формальным индексом в произвольном полиэдре P.

Пусть далее P – триангулированное замкнутое многообразие размерности n, $J : C_1(P) \to \mathbb{Z}_2^r$ – индексная вектор-функция относительно некоторого базиса группы гомологий $H_{n-1}(P)$, а $L : C_1(P) \to \mathbb{R}$ – весовая функция. Оставшиеся в главе 3 **§§3.2–3.5** содержат методы решения следующих задач.

1. Заданы вершины $u_1, u_2 \in V(P)$ и вектор $i \in G = \mathbb{Z}_2^r$. Ищется цепь $z \in C_1(P)$, обладающая свойствами:

- $\partial z = \{u_1, u_2\}$;
- $J(z) = i$;
- $L(z) \leq L(y)$ для всех цепей $y \in C_1(P)$, удовлетворяющих условиям $J(y) = i$ и $\partial y = \{u_1, u_2\}$.

2. Пусть $Q \subset P$ – подполиэдр, u_1 – вершина полиэдра P, а $Z_1(P, u_1 \cup Q)$ и $H_1(P, u_1 \cup Q)$ – группы относительных циклов и гомологий с коэффициентами из поля $\mathbb{Z}_2$. Для цепи $c \in C_1(P)$ договоримся полагать $\bar{c} = c + C_1(u_1 \cup Q)$.

Задана цепь $x \in C_1(P)$ и $\partial x = \{u_1, u_2\}$, где u_2 – некоторая вершина подполиэдра Q. Строится цепь $z \in C_1(P)$, удовлетворяющая условиям:

- $u_1 \in \partial z \subset u_1 \cup Q$;
- $[\bar{z}] = [\bar{x}]$ в $H_k(P, u_1 \cup Q)$;
- $L(z) \leq L(y)$ для всех $\bar{y} \in [\bar{x}]$ и $y \in \bar{y}$.

3. Заданы простые циклы $z_1^{n-1}, \ldots, z_r^{n-1}$, порождающие базис группы гомологий $H_{n-1}(P)$, и одномерный цикл $x \in Z_1(P)$, $[x] \neq 0$. Находится одномерный цикл z, обладающий свойствами:

- $z \sim x$;
- $L(z) = \min\limits_{y \in [x]} L(y)$.

4. Пусть $[z_1^{n-1}], \ldots, [z_r^{n-1}]$ – базис группы $H_{n-1}(P)$, относительно которого построена индексная вектор-функция $J : C_1(P) \to \mathbb{Z}_2^r$. Решается задача построения циклов $z_1^1, \ldots, z_r^1$, гомологические классы

которых образуют базис группы гомологий $H_1(P)$, дуальный базису $[z_1^{n-1}], \dots, [z_r^{n-1}]$, а вес каждого цикла z_k^1, $k = 1, \dots, r$, минимален среди весов всех циклов, ему гомологичных.

Основная идея предлагаемых методов решения сформулированных задач состоит в их редукции к задачам поиска путей в одномерном остове накрывающего полиэдра $\hat{P}_J$, минимизирующих весовую функцию $\hat{L} : C_1(\hat{P}_J) \to \mathbb{R}$ и удовлетворяющих подходящим краевым условиям. **Алгоритмы 3.2 – 3.5** являются их реализациями, а **теоремы 3.2 – 3.5** – обоснованиями.

В **Главе 4** рассмотрен двумерный случай и указаны приложения полученных результатов к проблеме локализации и устранения топологических дефектов компьютерных моделей поверхностей трехмерных тел.

В **§4.1** разработан метод построения простых циклов, порождающих базис группы гомологий $H_1(P)$ двумерного многообразия P без применения матриц инциденций. **Алгоритм 4.1** представляет собой реализацию этого метода, а **теорема 4.2** – обоснование.

Пусть P – двумерное замкнутое ориентируемое многообразие, а $L : C_1(P) \to \mathbb{R}$ – весовая функция. В **§4.2** решается задача нахождения циклов $z_1^1, \dots, z_r^1$, гомологические классы которых образуют канонический базис группы гомологий $H_1(P)$, а вес каждого цикла z_k^1, $k = 1, \dots, r$, минимален среди всех циклов, ему гомологичных. Метод решения этой задачи реализован в **алгоритме 4.2**, обоснование содержится в **теореме 4.2**.

Последний в работе **§4.3** посвящен описанию процедуры выделения ручек и устранению топологического шума в компьютерных моделях.

В ряде случаев компьютерные модели содержат топологические элементы (компоненты края, ручки, ребра ветвления, особые вершины), которых нет у исходных объектов. Совокупность этих лишних элементов, являющихся дефектами моделирования, принято называть топологическим шумом.

При устранении топологического шума наиболее сложной и интересной является задача локализации и удаления лишних ручек. Для ее решения нами разработан способ выделения ручек триангулированной поверхности.

Пусть P – триангулированное замкнутое и ориентируемое 2-

многообразие рода m и $T(P)$ – список его треугольников. Выделением ручки мы называем составление такого списка $T(R) \subset T(P)$, что объединение R всех его элементов гомеоморфно ограниченному цилиндру, а объединение симплексов из дополнения $T(P) \setminus T(R)$ представляет собой поверхность P' рода $m-1$ с двумя компонентами края. По списку $T(R)$ можно определить отношение размеров ручки R к соответствующим размерам всей поверхности P, что в ряде случаев позволяет оценить правильность отнесения R к топологическому шуму. При этом исправление модели осуществляется удалением $T(R)$ из общего списка треугольников $T(P)$ и заклеиванием получающихся дыр.

Предлагаемая схема выделения ручек поверхности P состоит в следующем:

1. С помощью алгоритма 4.1 найдем циклы $y_1, \ldots, y_r$, $r = 2m = \operatorname{rank} H_1(P)$, гомологические классы которых образуют базис группы $H_1(P)$.

2. Воспользуемся алгоритмом 2.1 и вычислим индексную вектор-функцию $J_0 : C_1(P) \to \mathbb{Z}_2^r$ относительно базиса $[y_1], \ldots, [y_r]$ группы $H_1(P)$.

3. Применяя алгоритм 4.2, построим циклы $z_1, \ldots, z_r$, каждый из которых имеет минимальный вес в своем классе гомологий, а эти классы образуют канонический базис группы $H_1(P)$. При этом мы получим также индексную вектор-функцию $J : C_1(P) \to \mathbb{Z}_2^r$ относительно базиса $[z_1], \ldots, [z_r]$.

4. Для каждой пары циклов z_{2k-1} и z_{2k}, $k = 1, \ldots, m$, выполним следующие шаги:

4.1. Выберем основной цикл $x \in \{z_{2k-1}, z_{2k}\}$ и дополнительный цикл $y \in \{z_{2k-1}, z_{2k}\}$, $y \neq x$ (например, по длине).

4.2. Для каждой вершины v_i, $i = 1, \ldots, n_k$, основного цикла x в одномерном остове накрывающего полиэдра $\hat{P}_J$ найдем кратчайший путь $\hat{y}_i$, идущий из вершины $(v_i, 0)$ в вершину $(v_i, J(y))$, и положим $y_i = p(\hat{y}_i)$.

4.3. Начиная с треугольника, инцидентного ребру $[v_i v_{i+1}]$ ($i+1$ вычисляется по модулю n_k), построим список T_i треугольников, расположенных между циклами y_i и y_{i+1}. Для объединения U_i симплексов из T_i вычислим группу $H_1(U_i)$.

4.4. Построим максимальное по включению сильно связное объединение R_k областей U_i, для которых $\operatorname{rank} H_1(U_i) \leqslant 1$.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Е. И. Яковлеву за полезные обсуждения и поддержку при работе над диссертацией.

Результаты диссертационной работы **опубликованы** в работах автора:

1. Лаптева, А. В. Методы поиска кратчайших 1-циклов в заданном классе гомологий / А. В. Лаптева, Е. И. Яковлев // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – 2004. – Т. 25. – С. 159–160.

2. Лаптева, А. В. Алгоритмы для поиска минимальных одномерных циклов / А. В. Лаптева, Е. И. Яковлев // Вестник ННГУ. Серия Математика. – 2005. – Вып. 1(3). – С. 76–87.

3. Лаптева, А. В. Поиск минимального пути в заданном классе относительных гомологий / А. В. Лаптева // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – 2005. – Т. 31. – С. 88–89.

4. Лаптева, А. В. Метод устранения топологического шума в компьютерных моделях 3D-объектов / А. В. Лаптева // Материалы XVIII Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики. – 2006. – С. 47.

5. Лаптева, А. В. Индексная вектор-функция / А. В. Лаптева // Материалы XVIII Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики. – 2006. – С. 48–52.

6. Lapteva, A. V. Index Vector-Function and Minimal Cycles / A. V. Lapteva, E. I. Yakovlev // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2006. – Vol. 22. – P. 35–46.

7. Лаптева, А. В. Алгоритм поиска минимальной одномерной цепи в заданном классе относительных гомологий / А. В. Лаптева // Вестник ННГУ. Серия Математика. – 2006. – Вып. 1(4). – С. 59–64.

8. Лаптева, А. В. Поиск минимальных одномерных циклов триангулированного многообразия / А. В. Лаптева // Современные вопросы геометрии и механики деформируемого твердого тела. Тезисы региональной научной конференции. – Чебоксары, 2006. – С. 25–26.

9. Lapteva, A. V. Minimal 1-Cycles Generating a Canonical Basis

of 2-Manifold's Homology Group / A. V. Lapteva, E. I. Yakovlev // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2006. – Vol. 31, No 4. – P. 555–570.

10. Лаптева, А. В. Построение дуального базиса из минимальных циклов / А. В. Лаптева // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – 2006. – Т. 34. – С. 151–152.

11. Лаптева, А. В. Поиск минимальных относительных циклов на многообразиях с краем / А. В. Лаптева // Чебоксары: Чувашгоспединститут. Вестник. – 2006. – N 5. – С. 96–100.